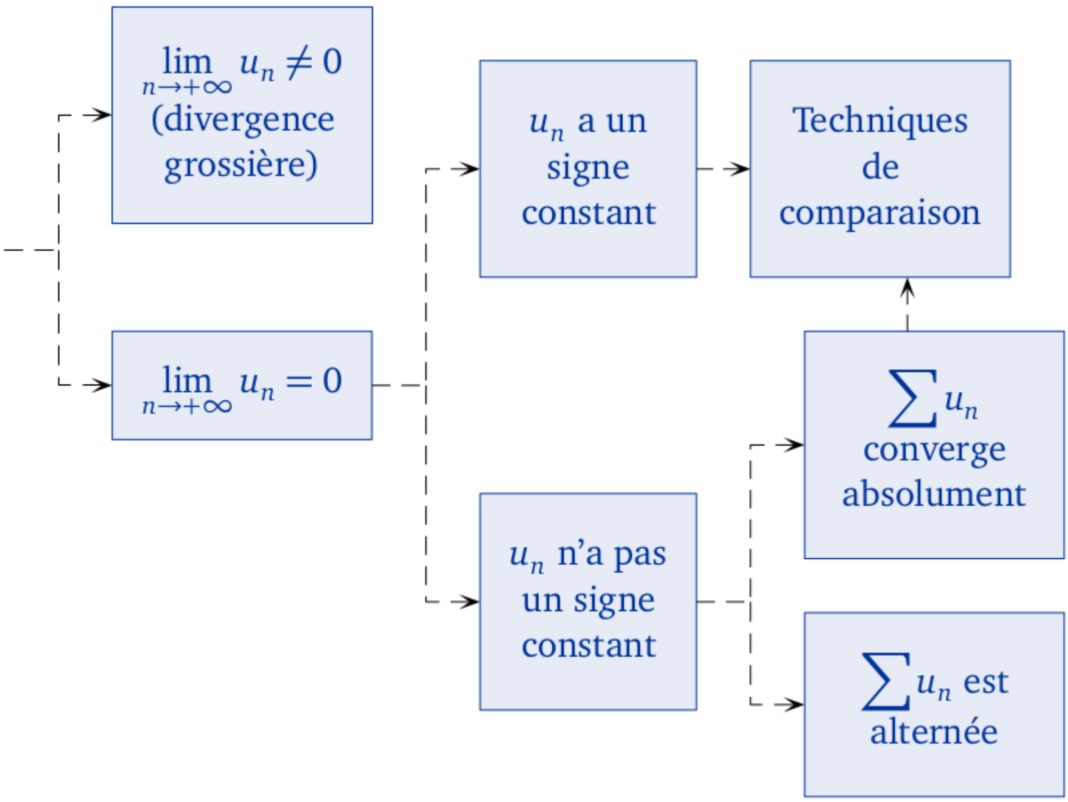
Chapitre 21 : Séries numériques

Table des matières



Introduction

On s'intéresse à l'étude de suites $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ dont le terme général s'écrit sous la forme $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ (avec u_k qui ne dépend pas de n). Exemples : $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

On dit dans ce cas qu'on s'intéresse à la série $\sum u_n$.

Nous allons développer ici des outils spécifiques à ce type d'étude. Toutes les définitions et propriétés du cours seront énoncées pour des séries admettant 0 comme rang initial, mais s'adaptent facilement pour des séries de rang initial $n_0 \in \mathbb{N}$.

1 Généralités

1.1 Vocabulaire relatif aux séries

Définition 1.1 (sommes partielles, convergence et divergence d'une série)

Soit (u_n) une suite numérique (définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$).
Pour tout entier naturel n, on appelle <u>somme partielle d'ordre n</u> de la série $\sum u_n$ la quantité suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit alors que la série $\sum u_n$ converge si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge, et que la série diverge si la suite de ses sommes partielles diverge.

Attention au nom des variables dans l'écriture d'une somme partielle. En général, on écrira $\sum_{k=0}^{n} u_k$ ou $\sum_{n=0}^{N} u_n$.

Remarque : On écrit parfois $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ au lieu de $\sum u_n$, lorsqu'on souhaite préciser le rang initial à partir duquel on considère la suite (u_n). Lorsque ce rang initial n'est pas précisé, on prend le plus petit entier naturel possible. La nature de la série $\sum u_n$ (convergente ou divergente) ne dépend pas du choix du rang initial n_0.

Définition 1.2 (somme d'une série convergente)

On considère une suite numérique (u_n).
On suppose que la série $\sum u_n$ converge, ce qui signifie que la suite (S_n) des sommes partielles converge.
On appelle alors <u>somme de la série</u> $\sum u_n$ la limite de la suite (S_n).
La somme de la série $\sum u_n$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

Remarque : La valeur de la somme de la série $\sum u_n$ (en cas de convergence) dépend du rang initial n_0 à partir duquel on définit la suite (u_n).

Notations : Attention à ne pas confondre :

- la série $\sum u_n$ (une suite) ;
- les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ (scalaires qui dépendent de n) ;
- sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (un scalaire indépendant de n), définie uniquement en cas de convergence de la série.

Exemples 1.3 : Étudier la nature et la somme (lorsque cela a un sens) des séries suivantes :

$$1)\sum n \qquad 2)\sum n^2 \qquad 3)\sum \frac{1}{n} \qquad 4)\sum \frac{1}{n^2} \qquad 5)\sum \frac{1}{2^n}$$

Vocabulaire : La série $\sum \frac{1}{n}$ a un nom spécifique, on l'appelle la série harmonique.

1.2 Premières propriétés concernant l'étude des séries

Proposition 1.4 (le terme général d'une série convergente tend vers 0)

Soit (u_n) une suite numérique.
Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Contraposée : si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Attention ! La réciproque est fausse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \not\Longrightarrow \sum u_n$ converge (contre-exemple : série harmonique).

Proposition 1.5 (linéarité de la somme)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge, et on a l'égalité suivante pour la somme de cette série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarques :

1. La somme de deux termes généraux de séries convergentes est le terme général d'une série convergente.
2. La somme d'un terme général d'une série convergente et d'un terme général d'une série divergente est le terme général d'une série divergente.
3. On ne peut rien dire a priori d'une série dont le terme général est la somme de deux termes généraux de séries divergentes.

Exemple 1.6 : Déterminer la nature et la somme (lorsque cela a un sens) des séries suivantes

$$1)\sum \left(\frac{6}{n^2} + \frac{1}{2^n}\right) \quad 2)\sum \left(\frac{6}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \quad 3)\sum \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \quad 4)\sum \left(n^2 + \frac{1-n^4}{n^2}\right)$$

1.3 Exemple des séries géométriques et de la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$

On appelle <u>série géométrique</u> une série du type $\sum q^n$, avec $q \in \mathbb{C}$ (série définie à partir du rang 0).

Théorème 1.7 (convergence et somme d'une série géométrique)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Remarques :

1. Lorsque $|q| \geqslant 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.
2. Plus généralement, pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, on a l'égalité suivante :

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}} \qquad \text{(premier terme de la somme au numérateur)}$$

Exemple 1.8 : Montrer que les séries suivantes sont convergentes et déterminer leur somme : 1) $\sum_{n\geqslant 4} \frac{\mathbf{i}^n}{2^{n+2}}$ 2) $\sum \mathbf{e}^{-n}$

Proposition 1.9 (série de terme général $\frac{z^n}{n!}$)

Soit $z \in \mathbb{C}$.
La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et on a l'égalité suivante $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathbf{e}^z$.

Exemple 1.10 : Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente et déterminer sa somme.

1.4 Restes d'une série convergente

Définition 1.11 (restes)

Soit (u_n) une suite numérique.
On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
On note S sa somme, et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N sa somme partielle d'ordre N.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on appelle <u>reste d'ordre N</u> de la série $\sum u_n$ le scalaire : $R_N = S - S_N$.

Remarque : Par définition, on a $R_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 1.12 (expression des restes comme « sommes infinies »)

Soit (u_n) une suite numérique.
On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
Pour tout entier naturel N, on a l'égalité suivante pour le reste R_N d'ordre N de la série $\sum u_n$:

$$\boxed{R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=N+1}^{n} u_k}$$

1.5 Lien entre suite et série

Proposition 1.13 (lien entre nature d'une suite et d'une série)

Soit (u_n) une suite numérique.
La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature (convergente ou divergente).

Remarque : En cas de convergence, on a l'égalité : $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) - u_{n_0} = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n)$..
On peut donc calculer la somme de la série connaissant la limite de la suite, ou inversement.

Exemple 1.14 : Montrer que la série suivante est convergente et déterminer sa somme $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2 Séries à termes positifs

On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs lorsque les u_n sont tous positifs.

2.1 Convergence ou divergence

Proposition 2.1 (caractérisation de la convergence pour une série à termes positifs)

Soit (u_n) une suite de réels **positifs**.
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
De plus :
- Si la série converge, alors sa somme est positive.
- Si la série diverge, alors la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$.

  Dans ce cas, on notera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Cette caractérisation reste valable si la suite (u_n) n'est positive qu'à partir d'un certain rang.

Conventions de calcul et relations d'ordre sur $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$ pour tout réel positif x ;
- $x < +\infty$ pour tout réel positif x ;

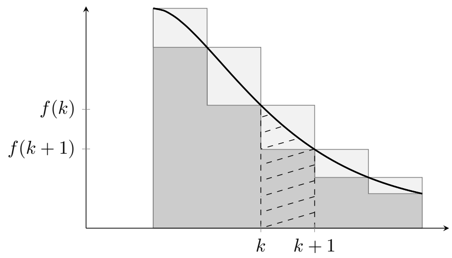
Remarques : Pour des séries à termes positifs, on a les propriétés suivantes.
1. La somme de deux termes généraux de séries convergentes est le terme général d'une série convergente.
2. La somme d'un terme général d'une série convergente et d'un terme général d'une série divergente est le terme général d'une série divergente.
3. La somme de deux termes généraux de séries divergentes est le terme général d'une série divergentes. **Attention : ce dernier point est vrai pour des séries à termes positifs mais faux pour des séries quelconques.**

2.2 Comparaison série-intégrale

Principe de la méthode :
On dispose d'une série de la forme $\sum f(n)$, où f est une fonction continue, positive et décroissante.

1. On encadre $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ par $f(k)$ et $f(k+1)$ (en utilisant la propriété de croissance de l'intégrale).

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$



2. En sommant les inégalités obtenues et en utilisant la relation de Chasles, on obtient un encadrement des sommes partielles de la série $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Un tel encadrement permet en général de conclure quant à la nature de la série. De plus :
   - en cas de divergence, on peut obtenir de cette manière un équivalent de la suite des sommes partielles ;
   - en cas de convergence, on obtient un encadrement de la somme. La même technique permet dans ce cas d'obtenir un équivalent de la suite des restes.

Exemple des séries de Riemann :
Une série de Riemann est une série du type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.2 (théorème des séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $\alpha \leqslant 0$, alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Si $0 < \alpha \leqslant 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $1 < \alpha$, alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

2.3 Comparaison de deux séries à termes positifs

Théorème 2.3 (théorème de convergence par majoration des séries à termes positifs)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que :
1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$;
2. $\sum v_n$ converge.

Alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exemple 2.4 : Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Corollaire 2.5 (théorème de divergence par minoration des séries à termes positifs)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$;
2. $\sum u_n$ diverge.

Alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 2.6 : Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Théorème 2.7 (Nature des séries de termes généraux positifs et équivalents)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) est positive à partir d'un certain rang, et que $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Attention ! L'hypothèse de positivité est primordiale $\left(\text{contre-exemple : } \sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } \sum \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exemple 2.8 : Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Théorème 2.9 (théorème de convergence par domination des séries à termes positifs)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels **à termes positifs** telles que :

1. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$;
2. $\sum v_n$ converge.

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 2.10 : Déterminer la nature de la série $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Corollaire 2.11 (théorème de divergence par domination des séries à termes positifs)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels **à termes positifs** telles que :

1. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$;
2. $\sum u_n$ diverge.

Alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 2.12 : Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\cos^2(n) + 1}$.

Remarques :

1. Comme o $\implies$ O, le dernier théorème est aussi valable sous l'hypothèse $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ au lieu de $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
2. On peut combiner les deux types de comparaison :
   - dans un premier temps, chercher un équivalent simple du terme général de la série ;
   - dans un second temps, comparer l'équivalent simple obtenu avec le terme général d'une série connue.

3 Séries à termes quelconques

3.1 Séries alternées

Définition 3.1 (série alternée)

On appelle <u>série alternée</u> toute série $\sum u_n$ dont le terme général est de signe alterné.
On note plutôt $\sum (-1)^n u_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive.

Théorème 3.2 (Critère spécial des séries alternées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et qui converge vers 0.
La série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

Exemple 3.3 : Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3.2 Séries absolument convergentes

Définition 3.4 (série absolument convergente)

Soit (u_n) une suite numérique (la suite (u_n) est à valeurs réelles ou complexes).
On dit que la série $\sum u_n$ est <u>absolument convergente</u> si la série $\sum |u_n|$ converge.
Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est <u>sommable</u> et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Remarque : Pour une série à termes positifs, la convergence absolue équivaut à la convergence.

Théorème 3.5 (la convergence absolue implique la convergence)

Soit (u_n) une suite numérique.
Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.
De plus,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,.$$

Remarque : La réciproque est fausse. Contre-exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$

Théorème 3.6 (théorème de convergence par domination)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.
On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{R}_+$;
2. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$;
3. $\sum v_n$ converge.

Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarques :

1. Comme $\mathrm{o} \implies \mathrm{O}$, le dernier théorème est aussi valable sous l'hypothèse $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ au lieu de $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
2. On peut combiner les deux types de comparaison :
   - dans un premier temps, chercher un équivalent simple du terme général de la série ;
   - dans un second temps, comparer l'équivalent simple obtenu avec le terme général d'une série connue.

Méthode : « **Règle du n^α** »
On regarde si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ pour un certain $\alpha > 1$. Si c'est le cas, alors $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série convergente à termes positifs d'où $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exemple 3.7 : Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}n}\ln(n)}{n\sqrt{n}}$.